Шәкір Айдос

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

2-дәріс. Монотонды өспелі және кемімелі тізбек.

Дәрістің мақсаты – Монотонды өспелі және кемімелі тізбек туралы ақпарат беру, олардың қасиеттерін дәлелдеу

Негізгі сұрақтар:

1. Монотонды өспелі және олардың қасиеттері
2. Монотонды кемімелі және олардың қасиеттері

2 Монотонды тізбек және оның шегі туралы теорема

Анықтама 2.1. Егер $\{x_n\}$ тізбегінің әрбір келесі мүшесі оның алдындағы мүшесінен кем (артық) болмаса, яғни барлық $n = 1, 2, \dots$ нөмірлері үшін

$$x_n \leq x_{n+1} \quad (x_n \geq x_{n+1})$$

теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегін кемімейтін (өспейтін) тізбек деп атайды.

Анықтама 2.2. Егер $\forall n \in \mathbb{N}$ үшін

$$x_n < x_{n+1} \quad (x_n > x_{n+1})$$

теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегін өспелі (кемімелі) тізбек деп атайды.

Тізбектердің барлық осы түрлерін біріктіріп, жалпы атпен **монотонды тізбектер** деп атайды.

Кез келген монотонды тізбек не жоғарғы, не төменгі жағынан шектелген болады. Шынында, кез келген кемімейтін тізбек төменгі жағынан шектелген (дәл төменгі шекара ретінде тізбектің бірінші мүшесін алуға болады), ал кез келген өспейтін тізбек жоғарғы жағынан шектелген (дәл жоғарғы шекара ретінде бірінші мүшесін алуға болады).

Сондықтан, егер өспейтін тізбек төменгі жағынан шектелсе, онда ол шектелген болады. Дәл осылай, егер кемімейтін тізбек жоғарғы жағынан шектелсе, онда ол шектелген тізбек болады.

Мысалдар

1) $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots$ – өспейтін тізбек. Ол жоғарғы жағынан бірінші мүшесі 1 санымен, ал төменгі жағынан 0 санымен шектелген.

2) $2, 2, 3, 3, \dots, n, n, \dots$ – кемімейтін тізбек. Ол төменгі жағынан 2 санымен шектелген, ал жоғарғы жағынан шектелмеген.

3) $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ – монотонды өспелі тізбек, себебі $n < n+1$, ал $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ монотонды кемітін тізбек, себебі $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$.

Теорема 2.1 (Монотонды тізбектің шегі туралы). Егер кемімейтін (өспейтін) тізбек жоғарғы (төменгі) жағынан шектелсе, онда ол жинақты.

Дәлелдеу $\{x_n\}$ тізбегі кемімейтін және жоғары жағынан шектелген болсын. Онда Вейерштрасс теоремасы бойынша $\{x_n\}$ тізбегінің дәл жоғарғы шекарасы бар, оны деп белгілейік, яғни

$$a = \sup\{x_n\}.$$

Осы a саны $\{x_n\}$ тізбегінің шегі болатынын көрсетейік. Дәл жоғарғы шекараның қасиеті бойынша $\{x_n\}$ тізбегінің кез келген мүшесі

$$x_n \leq a$$

теңсіздікті қанағаттандырады және кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін N нөмірі табылып,

$$a - \varepsilon < x_N$$

теңсіздік орындалады.

Берілген $\{x_n\}$ тізбегі кемімейтін болғандықтан барлық $n \geq N$ нөмірі үшін

$$x_N \leq x_n \implies 0 \leq a - x_n < \varepsilon,$$

немесе

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

яғни

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Теореманың екінші бөлігі, яғни $\{x_n\}$ тізбегі өспейтін болып төменгі жағынан шектелген жағдайы да жоғарыдағыдай дәлелденеді.

Теорема дәлелденді.

Салдар

Монотонды тізбек жинақты болу үшін шектелуі қажетті және жеткілікті.

1. Жинақты тізбек монотонды болмауы мүмкін.
2. Кемімейтін (өспейтін) және жоғарғы (төменгі) жағынан шектелген $\{x_n\}$ тізбегінің барлық элементтері оның шегі a-дан аспайды (кем болмайды), яғни
$$x_n \leq a \quad (x_n \geq a).$$
3. Монотонды тізбектің шегі туралы теорема шектің бар болуын ғана тағайындайды, бірақ оны анықтамайды. Алайда осының өзі де шектер теориясында өте маңызды.

Мысал

Төмендегі тізбекті қарастырайық:

$$\{x_n\} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

Монотонды тізбек шегі туралы теореманы қолданып, оның жинақты екенін дәлелдейік. Егер

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

болатынын ескерсек, онда

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

шегі 1^∞ түріндегі анықталмағандықты беретіні көруге болады.

Жоғарыдағы (2.1) тізбектің x_n мүшесін Ньютон биномының формуласын пайдаланып жіктейік:

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots \qquad (0.1)\\
&+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&\quad + \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Тізбектің келесі x_{n+1} мүшесі де осы сияқты жіктеледі:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = 2 &+ \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \dots \\
&+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \dots + \qquad (0.2)\\
&\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Осы (2.2) және (2.3) өрнектерін салыстырсақ, онда:

1. Біріншіден, (2.2) өрнектің оң жағындағы қосылғыштардың саны $n+1$, ал (2.3) өрнектің оң жағындағы қосылғыштардың саны $n+2$ болады және (2.3) өрнектегі соңғы $(n+2)$ қосылғышының оң екені көрінеді.

2. Екіншіден, кез келген $k = 2, 3, \dots, n$ үшін

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right),$$

себебі

$$1-\frac{s}{n} \le 1-\frac{s}{n+1}, \quad s = 1, 2, \dots, n-1; \quad n = 1, 2, \dots$$

Сондықтан

$$x_n < x_{n+1},$$

яғни $\{x_n\}$ тізбегі өспелі. Енді (2.1) тізбектің жоғарғы жағынан шектелетінін көрсетейік. Осы мақсатпен (2.2) өрнектің оң жағындағы әрбір жақшаны 1 санымен алмастырамыз және $k! \ge 2^{k-1}$, $k \ge 2$

теңсіздігін пайдаланамыз. Сонда

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{\,n-1}}.$$

Енді

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{\,n-1}} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^{\,n-1}}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{\,n-1}} < 1$$

екенін ескерсек,

$$x_n < 3 - \frac{1}{2^{\,n-1}} < 3.$$

Соңғы теңсіздік $\{x_n\}$ тізбегінің жоғарғы жағынан шектелетінін көрсетеді. Сонымен, $\{x_n\}$ тізбегі өспелі және жоғарғы жағынан шектелген екен. Демек, оның шектілі шегі бар, оны Эйлерді құрметіне **Эйлер саны** деп атап, e әрпімен белгілейміз:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

e — иррационал сан. Негізі e болатын логарифмдерді **натурал логарифмдер** немесе **Непер логарифмдері** деп атайды, оны $\ln x$ деп белгілейміз, демек

$$\ln x = \log_e x.$$

Біз алдағы уақытта осы натурал логарифмдерді көбінесе пайдаланамыз. Енді $\ln x$ пен $\lg x$, $\forall x > 0$ арасындағы байланысты қарастырайық. Осы мақсатпен $x = e^{\ln x}$ тепе-теңдігін негізі 10 бойынша логарифмдейміз. Сонда

$$\lg x = \ln x \cdot \lg e \quad \text{немесе} \quad \lg x = M \ln x,$$

мұндағы

$$M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0.4342$$

санын натурал логарифмдер жүйесінен ондық жүйеге өту модулі деп атайды.

Мысал есеп: Монотонды тізбек

Берілген тізбек:

$$x_n = \frac{n}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Қадам 1: Монотондықты тексеру.

Тізбектің келесі мүшесі:

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Салыстырайық:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Сондықтан

$$x_{n+1} > x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

яғни тізбек өспелі (монотонды өспелі).

Қадам 2: Жоғарғы шектелгендігін тексеру.

Барлық $n \in \mathbb{N}$ үшін:

$$x_n = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Сондықтан тізбек жоғарғы жағынан шектелген, төменгі жағынан болса:

$$x_n = \frac{n}{n+1} > 0.$$

Қорытынды:

Тізбек өспелі және шектелген, сондықтан монотонды тізбектің шегі бар. Шегін табайық:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Демек, тізбектің шегі

$$\boxed{1}.$$

1 Қосымша ақпарат

Студент толық ақпаратты [1], [2], [3], [4], [5], [6] жұмыстардан қарауға болады.

Список литературы

[1] Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – М., 1968, 1972, 1956, 1960, 1964, 1957, 2002.
1

[2] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1997, 1990, 1977, 1962, 1998, 1969, 1966, 1958, 1956, 1952, 2002, 2004, 2006, 2005. 1

[3] Темірғалиев Н. Математикалық анализ. – Алматы, 1991. 1

[4] Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. – М., 1984, 1981, 1988, 2003. 1

[5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. – М.: Наука, 1982, 1987, 1985, 2004, 2006 1

[6] Сатығулова С., Искакова А.Қ., Айтжанов С.Е. Математикалық анализ I. – Алматы: Қазақ университеті, 2020. -236 б. 1